Теоретические основы электротехники

Лекция 9
Комплексный метод расчета цепей с последовательным соединением элементов R, L, C

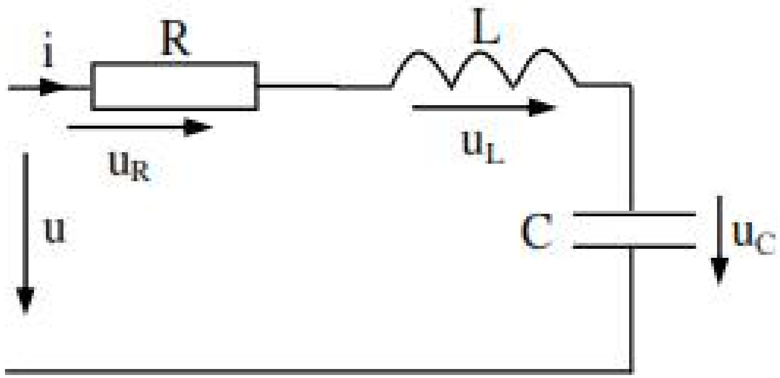
преподаватель:
доцент кафедры электротехники, автоматики и метрологии, к.п.н. ***Елена Артуровна Вахтина***

ПЛАН

1. Векторная диаграмма напряжений.
2. Треугольник напряжений.
3. Последовательный колебательный контур
4. Резонанс напряжений
5. Заключение

1. Векторная диаграмма напряжений

Пусть в ветви (см. рис.), состоящей из последовательно соединенных элементов **R, L** и **C,** протекает синусоидальный ток



$$i = I_m \cdot \sin(\mu t + \cdot_i) \qquad (1)$$

Найти напряжения на отдельных элементах и входе схемы

В соответствии со вторым законом Кирхгофа (2ЗК): $u = u_R + u_L + u_C$

$$u_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \sin(\mu t + \cdot_i)$$

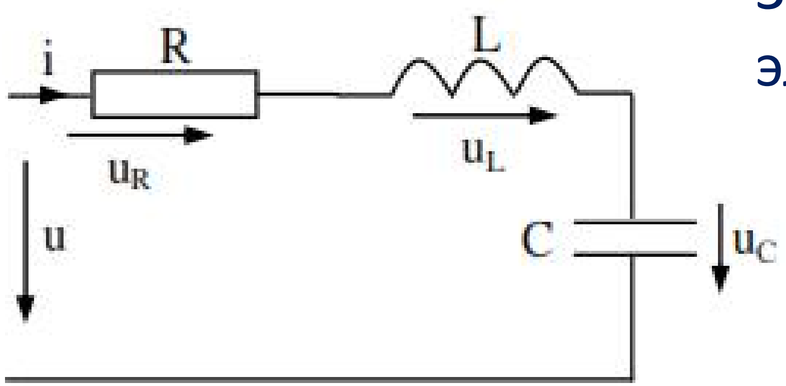
$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot I_m \cdot \mu \cdot \cos(\mu t + \cdot_i) = \mu L \cdot I_m \cdot \sin(\mu t + \cdot_i + 90^{\circ})$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i dt = -\frac{I_m}{\mu C} \cdot \cos(\mu t + \cdot_i) = -\frac{I_m}{\mu C} \cdot \sin(\mu t + \cdot_i + 90^{\circ}) = \frac{I_m}{\mu C} \cdot \sin(\mu t + \cdot_i - 90^{\circ})$$

1. Векторная диаграмма напряжений

Лекция 9

Определение общего напряжения u сводится к вычислению амплитуды $\boldsymbol{U_m}$ и начальной фазы $\cdot_u$ комплексным методом



Запишем ток и напряжение на элементах схемы в комплексном виде:

$$\dot{I} = I \cdot e^{j \cdot_i} \qquad (2)$$

$$\dot{U}_R = R \cdot I \cdot e^{j \cdot_i} = R \cdot \dot{I} \qquad (3)$$

$$\dot{U}_L = \mu L \cdot I \cdot e^{j(\cdot_i + 90^o)} = \mu L \cdot I \cdot e^{j \cdot_i} \cdot e^{j90^o} = j\mu L \dot{I} \qquad (4)$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{\mu C} \cdot I \cdot e^{j(\cdot_i - 90^o)} = \frac{I}{\mu C} \cdot e^{j \cdot_i} \cdot e^{-j90^o} = -j \cdot \frac{\dot{I}}{\mu C} = \frac{\dot{I}}{j\mu C} \qquad (5)$$

Учтем, что

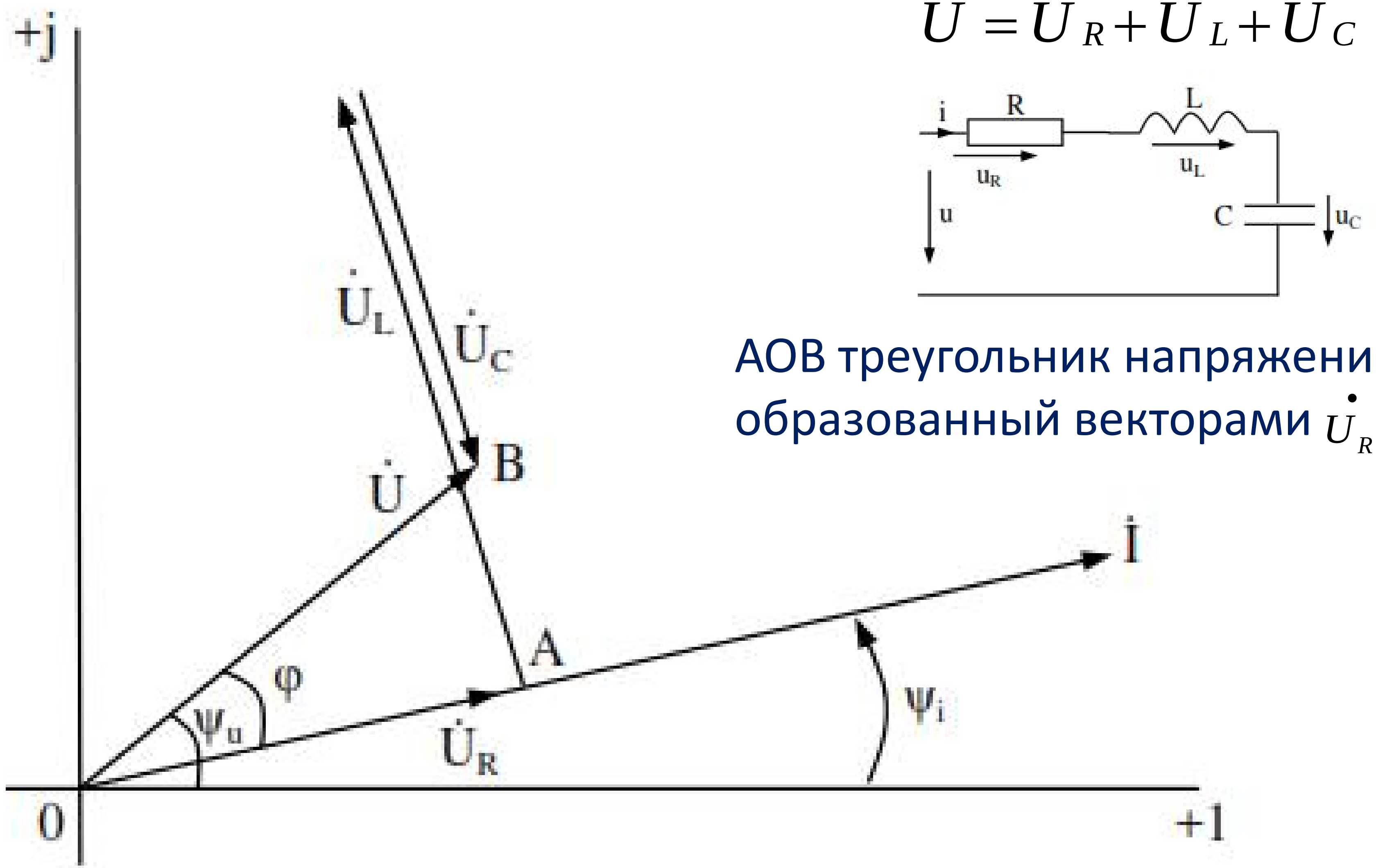
$$\boxed{e^{j90^o} = \cos 90^o + \sin 90^o = j}$$

$$\boxed{e^{-j90^o} = \cos(-90^o) + \sin(-90^o) = -j = \frac{1}{j}}$$

1. Векторная диаграмма напряжений

Сумме синусоидальных напряжений соответствует сумма комплексов действующих напряжений согласно **2ЗК**:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C \qquad (6)$$



АОВ треугольник напряжений образованный векторами $\dot{U}_R \quad \dot{U}_L \quad \dot{U}_C$

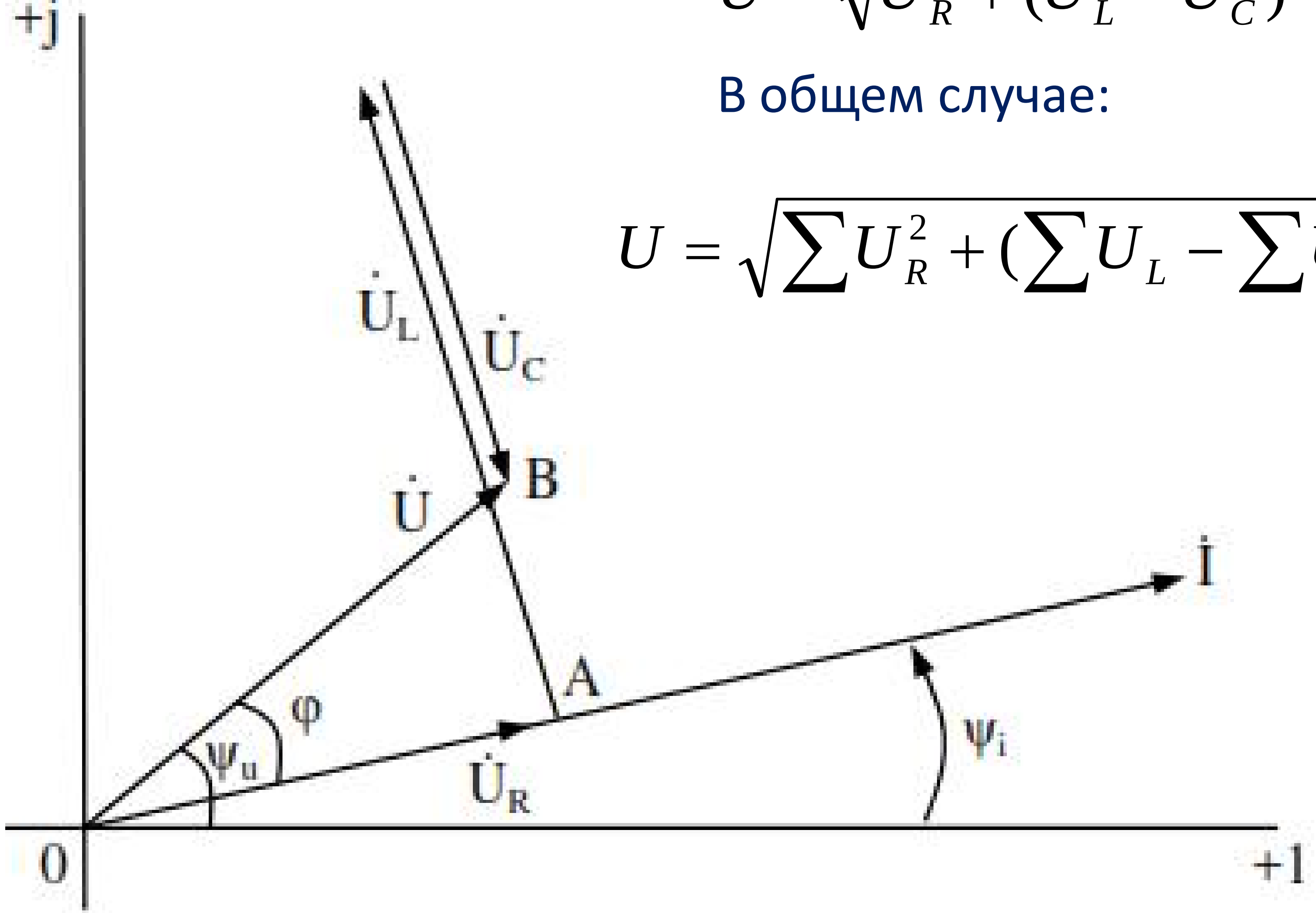
2. Треугольник напряжений

Из треугольника напряжений можно определить модуль общего напряжения

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad (7)$$

В общем случае:

$$U = \sqrt{\sum U_R^2 + (\sum U_L - \sum U_C)^2} \quad (8)$$



2. Треугольник напряжений

Амплитудное значение общего напряжения: $U_m = \sqrt{2} \cdot U$ (9)

Угол сдвига фаз между током и напряжением ***φ*** определяется из треугольника ОАВ

$$\varphi = arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} \qquad (10)$$

Угол ***φ*** всегда направлен от вектора тока к вектору напряжения. Он может быть как положительным, так и отрицательным и представляет собой разность начальных фаз напряжения ψ_u и тока ψ_i.

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \qquad (11)$$

Положительный угол направлен против часовой стрелки (при индуктивном характере нагрузки, когда $\psi_u > \psi_i$).

Зная угол ***ф*** можно определить начальную фазу общего напряжения $\cdot_{u}$

$$\cdot_{u} = \cdot_{i} + \ddot{\ }\qquad (12)$$

Амплитуда $\boldsymbol{U_m}$ и фаза $\cdot_{u}$ определены.

Запишем выражение для мгновенного значения напряжения:

$$U = U_m \cdot \sin(\mu t + \cdot_{i} + \ddot{\ }) = U_m \cdot \sin(\mu t + \cdot_{u})\qquad (13)$$

Порядок расчета:

1) Заданный ток $i = I_m \cdot \sin(\mu t + \cdot_{i})$ записываетм в комплексной форме $\dot{I} = I \cdot e^{j \cdot_{i}}$

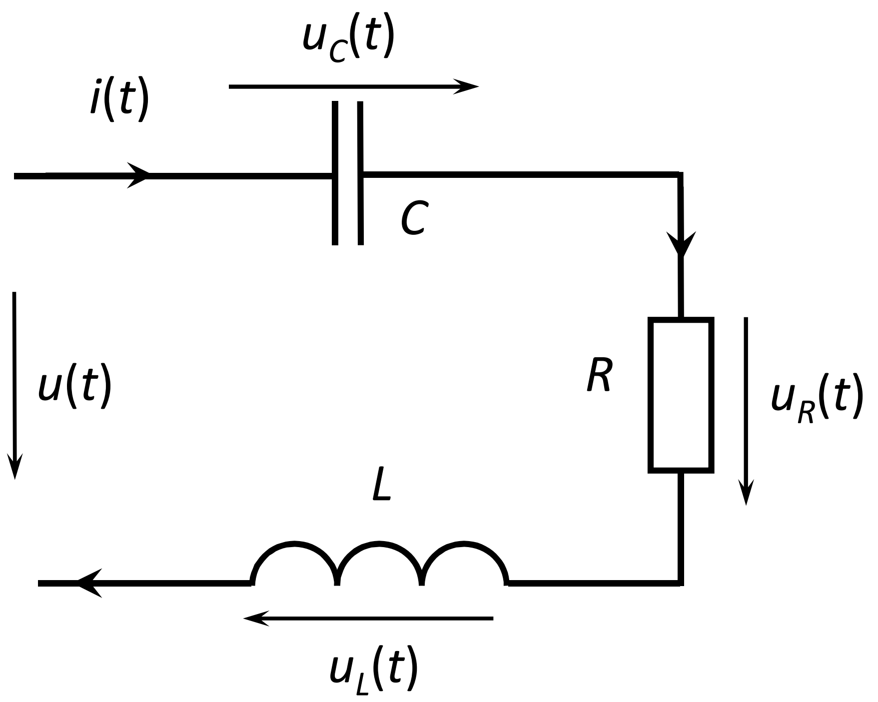
2) По формулам (3, 4, 5) рассчитываем комплексы напряжений на каждом элементе схемы.

3) По формуле (6) рассчитываем комплекс общего напряжения.

Порядок расчета (продолжение):

4) Строим векторную диаграмму напряжений и треугольник напряжений и определяем модуль общего напряжения по формуле (7) и его амплитуду (9).
5) Рассчитываем угол сдвига фаз между током и напряжением по формуле (10).
6) Определяем начальную фазу напряжения $\psi_u = \psi_i + \varphi$.
7) Записываем выражение для мгновенного значения напряжения на входе схемы по формуле (13)

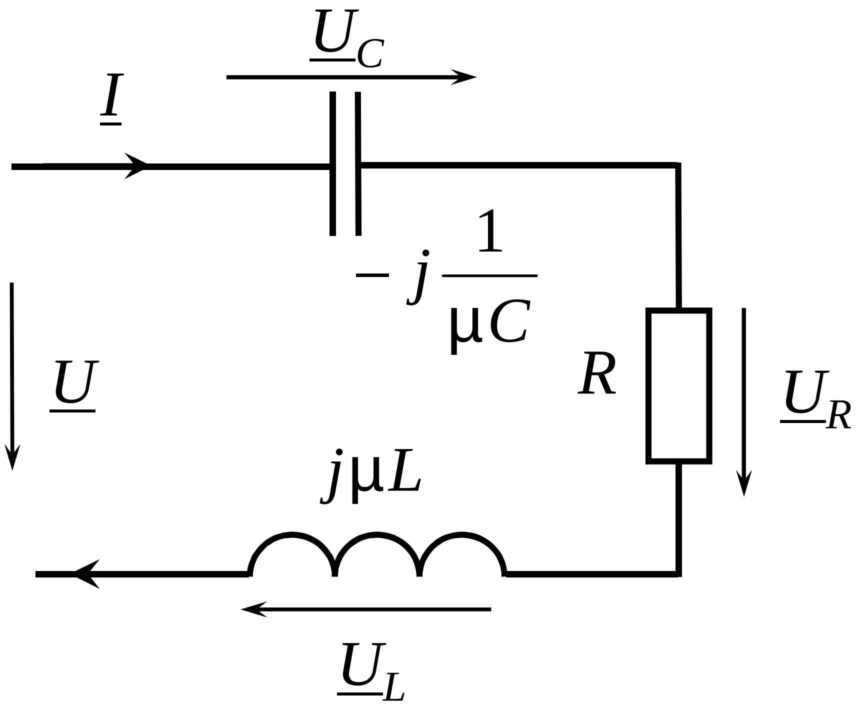
3. Последовательный колебательный контур



$$i(t) = I_m \cdot \sin(\mu \cdot t + \sim_i)$$

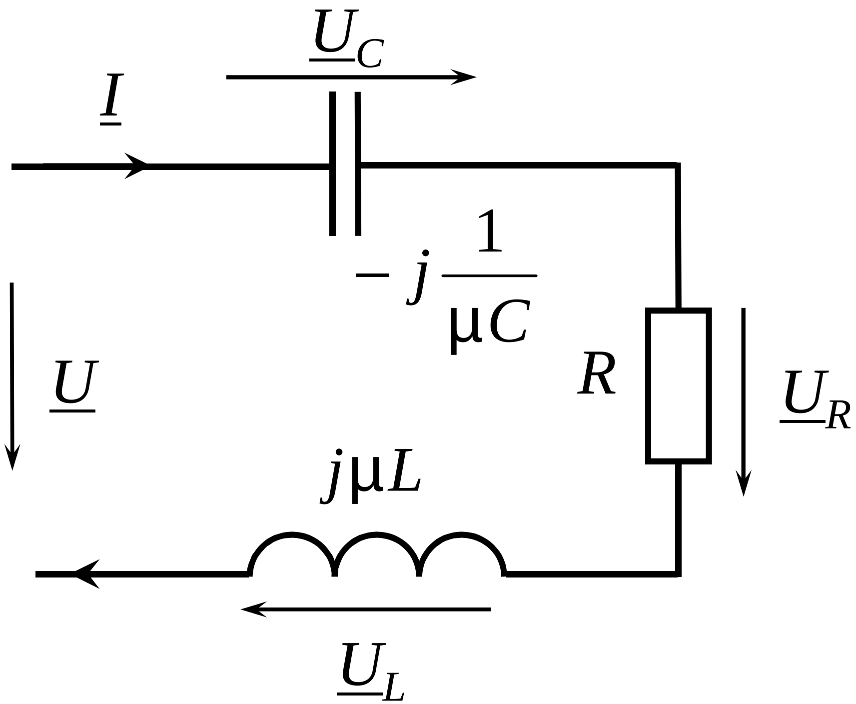
$$u(t) = u_C(t) + u_R(t) + u_L(t) =$$
$$= U_{mC} \cdot \sin(\mu \cdot t + \sim_{uC}) + U_{mR} \cdot \sin(\mu \cdot t + \sim_{uR}) + U_{mL} \cdot \sin(\mu \cdot t + \sim_{uL})$$

3. Последовательный колебательный контур



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C =$$
$$= R\underline{I} + j\mu L\underline{I} - j\frac{1}{\mu C}\underline{I} = R\underline{I} + j\left(\mu L - \frac{1}{\mu C}\right)\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

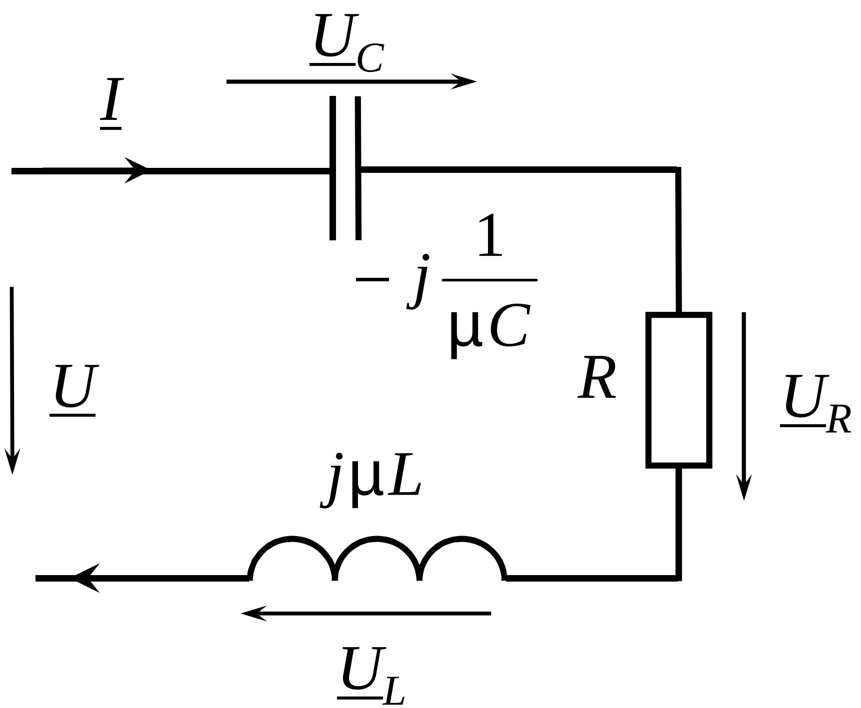
3. Последовательный колебательный контур



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\mu L - \dfrac{1}{\mu C}\right)}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\mu \cdot L - \frac{1}{\mu \cdot C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

3. Последовательный колебательный контур



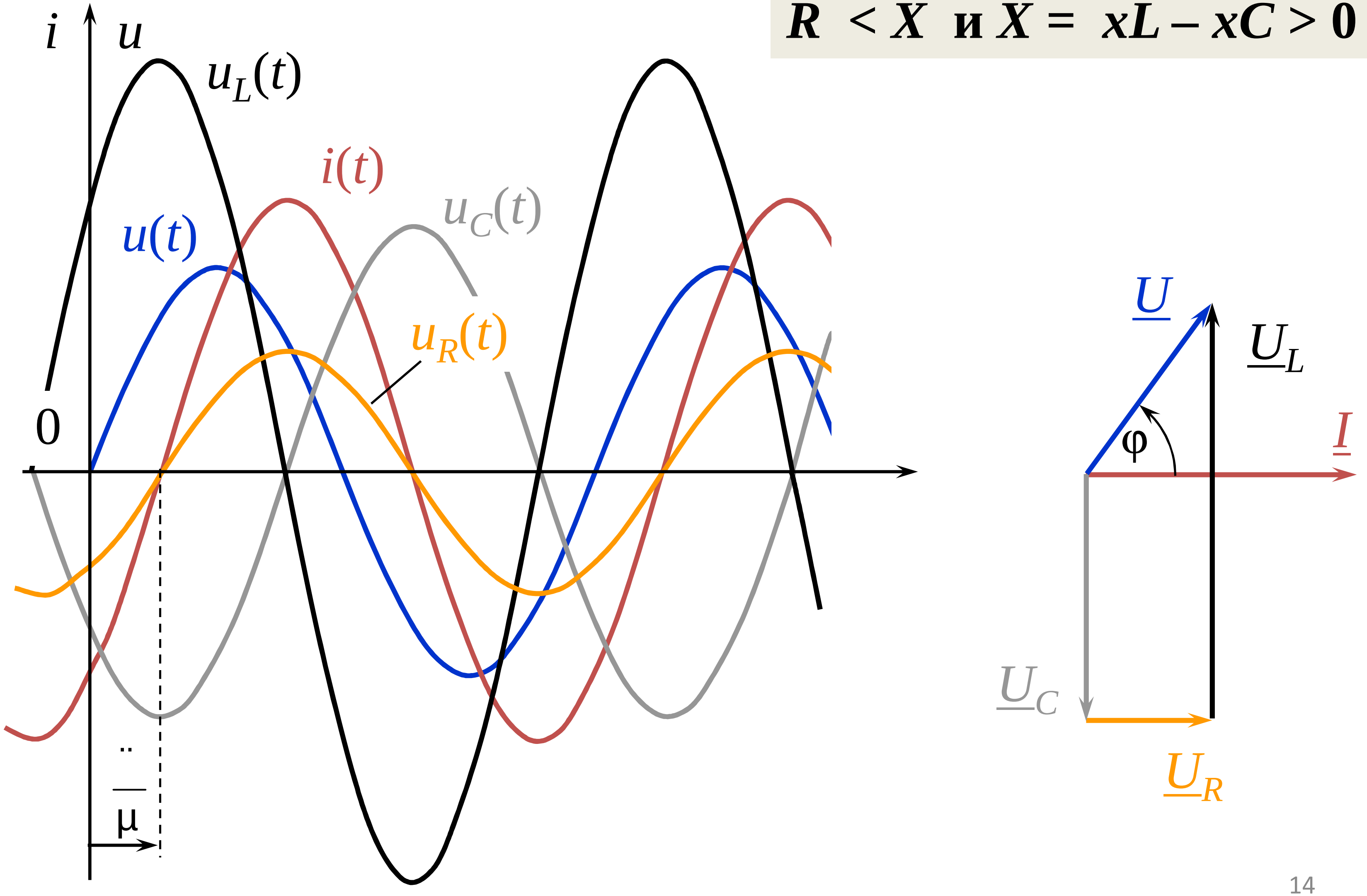
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\mu L - \dfrac{1}{\mu C}\right)}$$

$$\text{¨} = arctg \frac{\mu L - \dfrac{1}{\mu C}}{R}$$

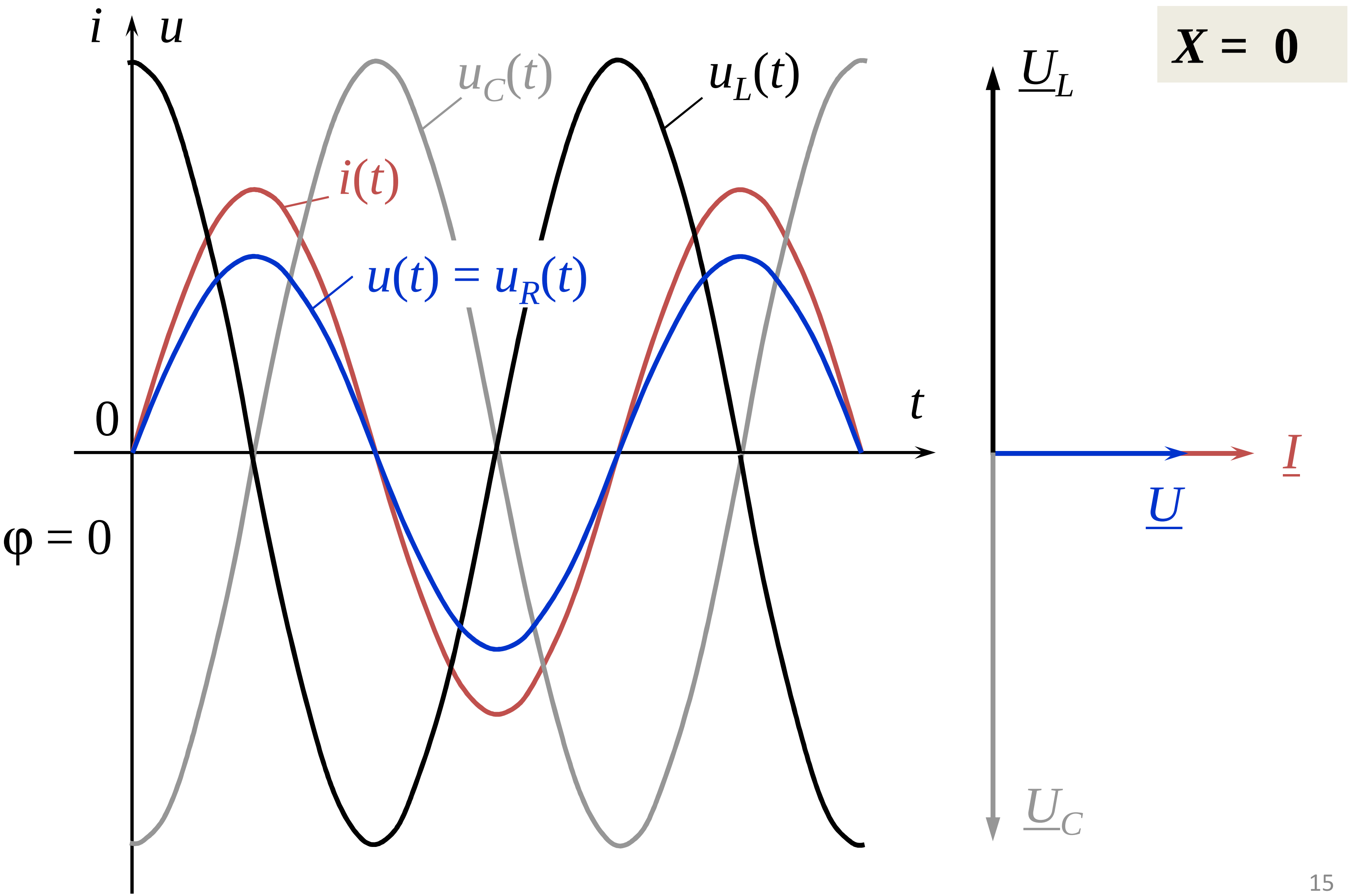
$$\text{¨} = \text{¨}_u - \text{¨}_i = arctg \frac{x_L - x_C}{R} = arctg \frac{X}{R} \qquad -\frac{\text{®}}{2} \le \text{¨} \le +\frac{\text{®}}{2}$$

3. Последовательный колебательный контур

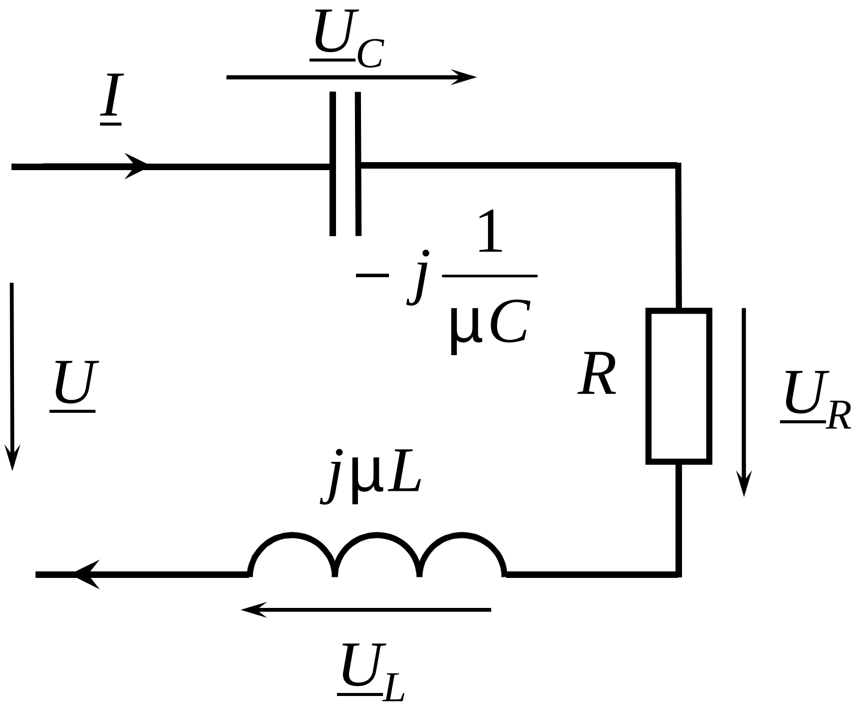
$R < X$ и $X = xL - xC > 0$



4. Резонанс напряжений



4. Резонанс напряжений

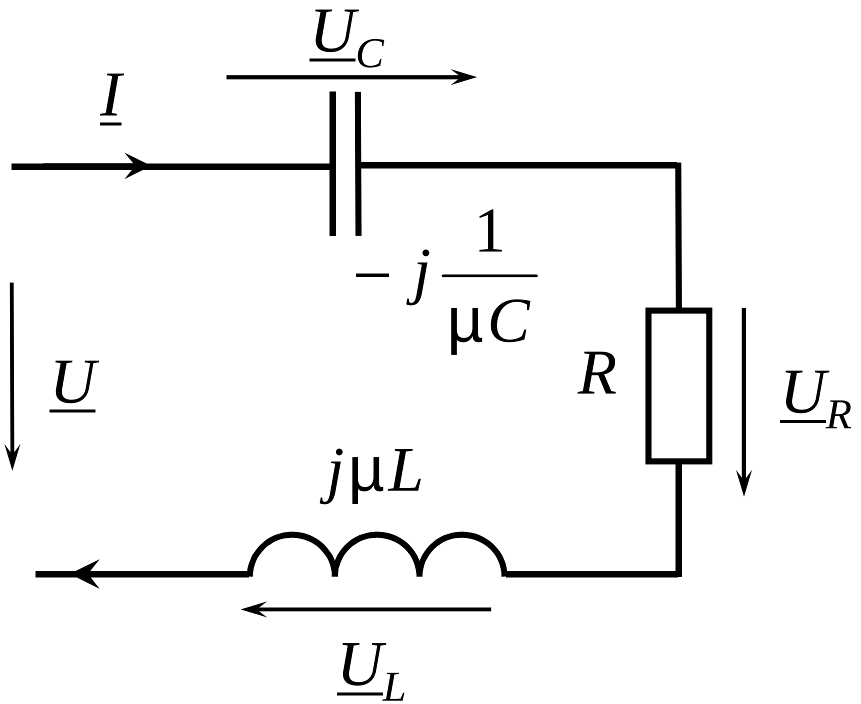


$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\mu L - \dfrac{1}{\mu C}\right)}$$

$$\cdot\cdot = arctg\frac{\mu L - \dfrac{1}{\mu C}}{R}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\mu_0 L - \dfrac{1}{\mu_0 C}\right)} = \frac{\underline{U}}{R}$$

4. Резонанс напряжений



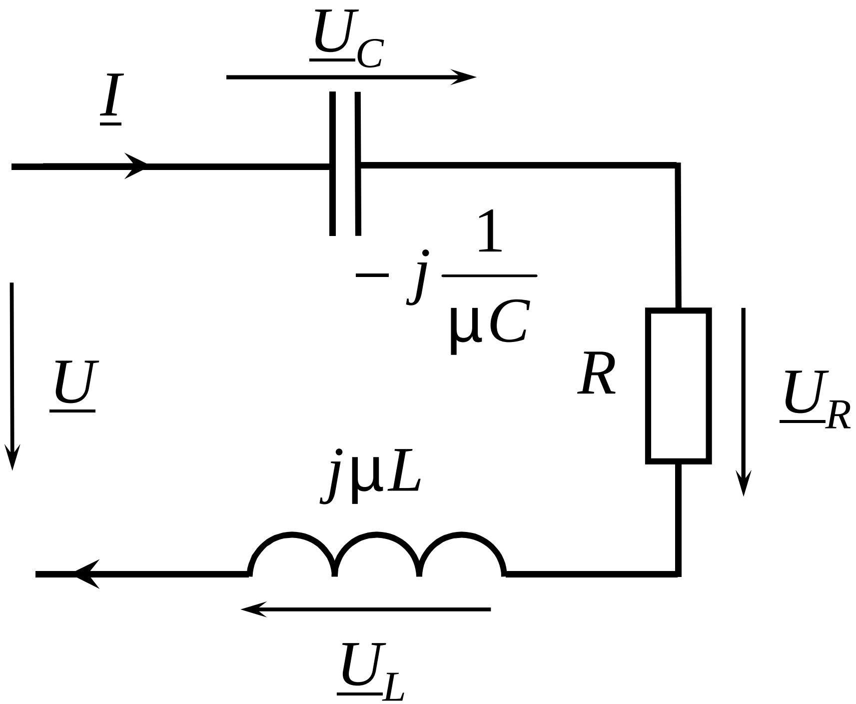
$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\mu_0 L - \frac{1}{\mu_0 C}\right)} = \frac{\underline{U}}{R}$$

$$I(\mu) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \frac{L}{R^2 \cdot C} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_0} - \frac{\mu_0}{\mu}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q_Д^2 \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_0} - \frac{\mu_0}{\mu}\right)^2}}$$

$$Q_Д = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\circ}{R}$$

4. Резонанс напряжений



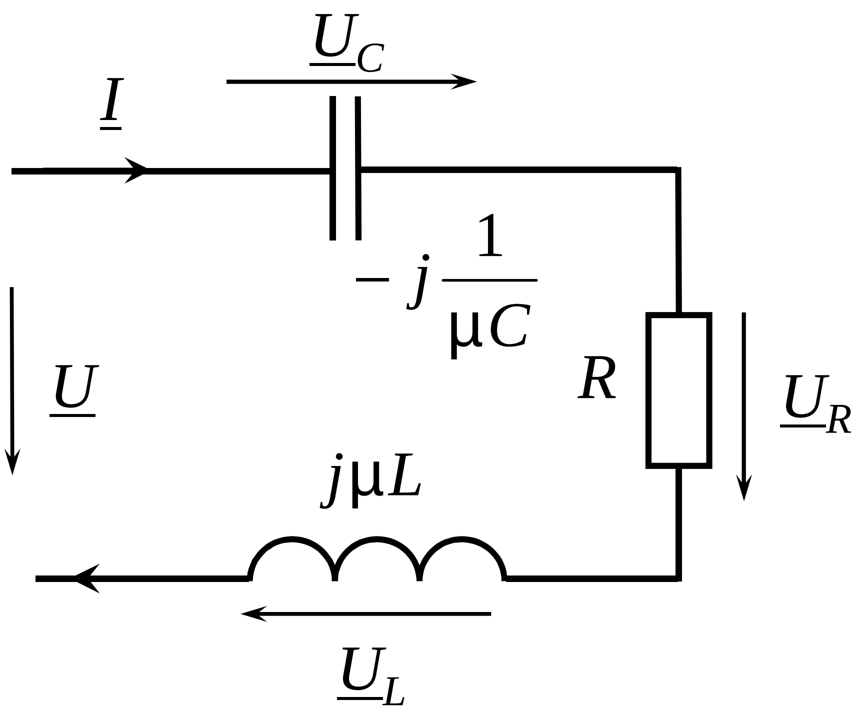
$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\mu_0 L - \frac{1}{\mu_0 C}\right)} = \frac{\underline{U}}{R}$$

$$I(\mu) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q_Д^2 \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_0} - \frac{\mu_0}{\mu}\right)^2}}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad Q_Д = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{^\circ}{R}$$

$$U_L(\mu) = \mu L I(\mu) = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\mu}{\mu_0} I(\mu) = Q_Д R \frac{\mu}{\mu_0} I(\mu) = \frac{Q_Д \frac{\mu}{\mu_0} U}{\sqrt{1 + Q_Д^2 \left(\frac{\mu}{\mu_0} - \frac{\mu_0}{\mu}\right)^2}}$$

4. Резонанс напряжений



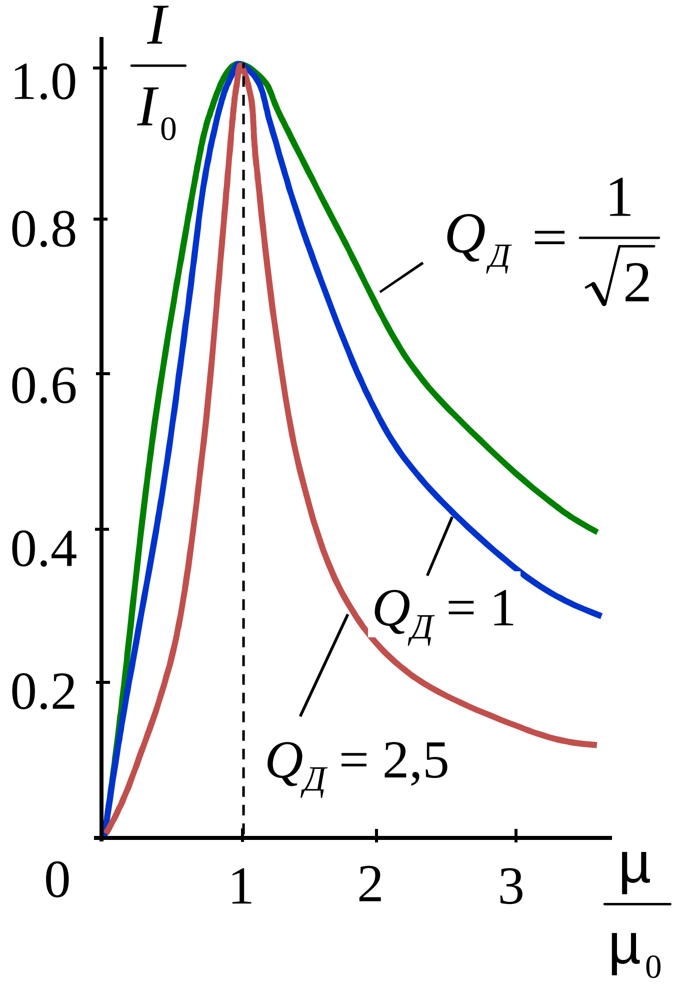
$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\mu_0 L - \dfrac{1}{\mu_0 C}\right)} = \frac{\underline{U}}{R}$$

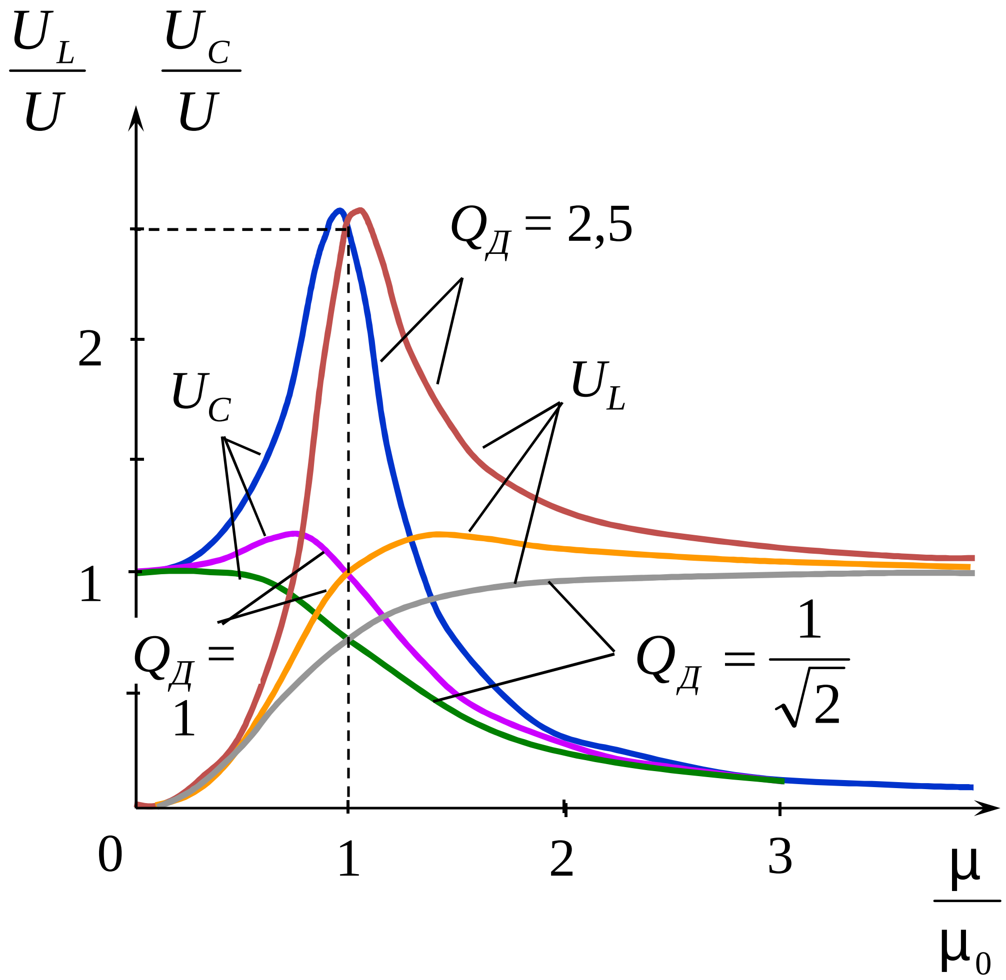
$$I(\mu) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q_Д^2 \cdot \left(\dfrac{\mu}{\mu_0} - \dfrac{\mu_0}{\mu}\right)^2}}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad Q_Д = \frac{\sqrt{\dfrac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R}$$

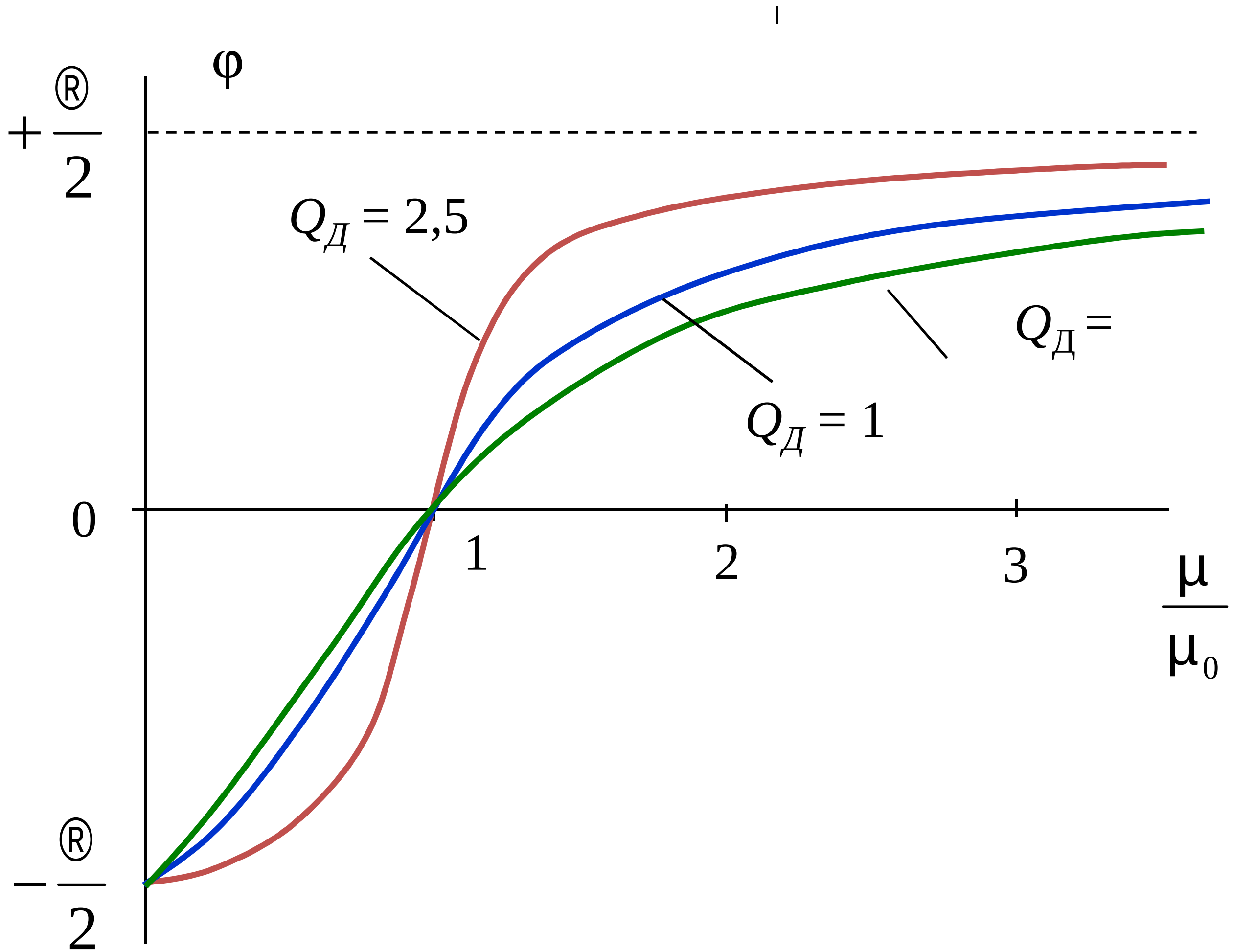
$$U_C(\mu) = \frac{I(\mu)}{\mu \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{\mu_0}{\mu} I(\mu) = RQ_Д \frac{\mu_0}{\mu} I(\mu) = \frac{Q_Д \dfrac{\mu_0}{\mu} U}{\sqrt{1 + Q_Д^2 \left(\dfrac{\mu}{\mu_0} - \dfrac{\mu_0}{\mu}\right)^2}}$$

4. Резонанс напряжений





4. Резонанс напряжений

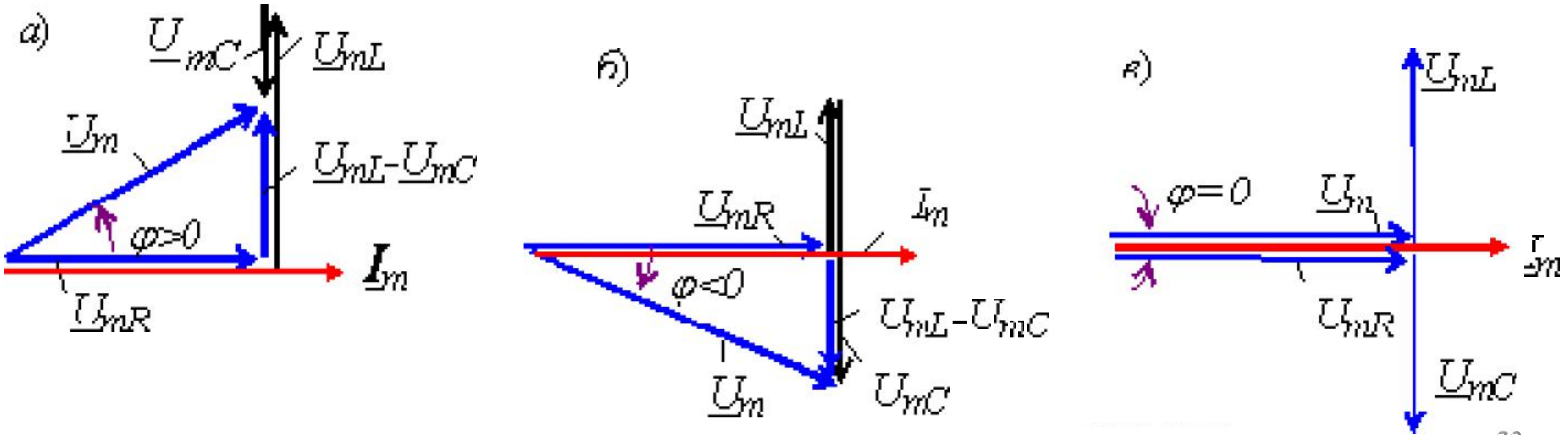


5. Заключение

а) при $\mathbf{X_L > X_C}$ и $\mathbf{U_L > U_C}$ цепь носит **резистивно-индуктивный** характер, т.е. ток i отстает по фазе от напряжения *u* на угол φ (рис. а);

б) при и $\mathbf{X_L < X_C}$ и $\mathbf{U_L < U_C}$ цепь носит **резистивно-ёмкостный** характер, т. е. ток i опережает по фазе напряжение *u* на угол φ (рис. б);

в) при $\mathbf{X_L = X_C}$ и $\mathbf{U_L = U_C}$ имеет место явление **резонанса напряжений.** Нагрузка для источника является чисто *резистивной*; угол $\varphi = 0$ (рис. в).



5. Заключение

Полное сопротивление цепи ***Z*** при резонансе напряжений оказывается равным активному сопротивлению ***R***.

Т.к. $\mathbf{X_L=X_C}$ и реактивное сопротивление цепи оказывается равным нулю: $\mathbf{X = X_L - X_C = 0}$

$$Z=\sqrt{R^2+\left(X_L{}^2-X_C{}^2\right)}=R$$

5. Заключение

Ток в цепи совпадает по фазе с напряжением и может оказаться довольно большим даже при небольшом напряжении.

$$\uparrow I = \frac{U}{Z \downarrow}$$

При этом напряжения $\mathbf{U_L}$ и $\mathbf{U_C}$ могут существенно (в десятки раз!) превышать напряжение питания.

5. Заключение

- При заданных значениях ***L*** и ***C*** резонанс может быть получен путем изменения частоты.

- Поскольку $X_L = \mu L$, а $X_C = 1 / \mu C$, то резонансная частота μ_0 определяется из уравнения:

$$\mu_0 L = 1 / \mu_0 C$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$